

# Vom Welle-Teilchen-Dualismus zur Schrödinger-Gleichung

Nicolas Hamel

In dieser Arbeit wird gezeigt, wie sich die Grundlagen des wellenmechanischen Formalismus der Quantenmechanik aus lediglich zwei Postulaten von Louis de Broglie herleiten lassen. Ausgangspunkt ist der von Einstein eingeführte Zusammenhang  $E = hf$ , der im Rahmen der Erklärung des photoelektrischen Effekts die Energie eines Photons mit seiner Frequenz verknüpft. DeBroglie postulierte, dass die Energie jedes massenbehafteten Teilchens äquivalent entweder durch die Gleichung  $E = mc^2$  oder  $E = hf$  definiert ist. Da dieses Postulat allein nicht ausreicht, um den Wellencharakter von Materie widerspruchsfrei zu beschreiben, ergänzte de Broglie die Annahme, dass jedes massenbehaftete Teilchen von einer Materiewelle begleitet wird. Auf Grundlage dieser beiden Postulate werden die wesentlichen Beziehungen der Quantenmechanik entwickelt.

**Keywords:** Welle-Teilchen-Dualismus; Quantenmechanik; Schrödingergleichung, Materiewelle, DeBroglie Postulat

## 1. Die Postulate von DeBroglie

1905 veröffentlichte Albert Einstein seine spezielle Relativitätstheorie, in der zum ersten mal die Massen-Energie-Äquivalenz  $E = mc^2$  formuliert wurde. Im selben Jahr (dem sogenannten "Wunderjahr" von Einstein) zeigte er im Rahmen der Untersuchung des photoelektrischen Effekts, dass elektromagnetische Wellen Teilcheneigenschaften besitzen und die Energie dieser Teilchen (Photonen) proportional zur Frequenz der Welle ist. Die Proportionalitätskonstante ist das Plank'sche Wirkungsquantum  $h$  sodass für die Energie der Photonen  $E = hf$  gilt.

Louis DeBroglie schlug in seiner Dissertation von 1924 vor, dass nicht nur Licht Teilcheneigenschaften besitze, sondern auch umgekehrt jedes massenbehaftete Teilchen als Welle der Frequenz  $f = \frac{mc^2}{h}$  interpretiert werden kann, sodass die Beziehung

$$E = mc^2 = hf \quad (1. \text{ Postulat}) \quad (1)$$

gilt. Wenn wir also ein Teilchen in seinem Ruhesystem  $A$  mit der Ruhemasse  $M$  betrachten, so kann diesem eine Frequenz  $f_A = \frac{Mc^2}{h}$  zugeordnet werden. Dieses periodische Phänomen, das mit der Masse identifiziert wird, nennt DeBroglie den

*inneren Puls* des Teilchens.

Wenn sich nun ein Beobachter relativ zum Bezugssystem  $A$  mit der Geschwindigkeit  $v$  bewegt, so misst dieser Beobachter in seinem Ruhesystem  $B$  aufgrund der Zeitdilatation eine langsamere Frequenz  $f_B$  (des *inneren Puls*)

$$f_B = f_A \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (2)$$

Die Energie der Masse in seinem Bezugssystem  $B$  ist wegen  $E = hf$  geringer als im Ruhesystem der Masse  $A$ .

Gleichzeitig misst der relativ bewegte Beobachter aber auch eine größere relativistische Masse  $M_B = M \left( \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right)^{-1}$ , weshalb die Energie der Masse in seinem Bezugssystem größer sein müsste als im Ruhesystem  $A$  der Masse. Damit die Beziehung  $mc^2 = hf$  hält, müsste die Masse im Bezugssystem  $B$  die Frequenz

$$f'_B = f_A \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3)$$

haben. Das Postulat  $mc^2 = hf$  führt also offensichtlich zu einem Widerspruch.

Anstatt das Postulat wieder zu verwerfen, versuchte DeBroglie die beiden Frequenzen  $f_B$  und  $f'_B$  miteinander zu vereinbaren und sie der Masse gleichzeitig zuzuordnen. Dies gelang ihm schließlich durch die Einführung eines weiteren Postulats. Laut diesem zweiten Postulat trage die Masse  $M$  nicht nur einen *inneren Puls* der Frequenz  $f_A$ , der in Bezugssystem  $B$  aufgrund der Zeitdilatation verlangsamt ist und den Wert  $f_B$  annimmt, sondern wird zusätzlich von einer Materiewelle begleitet, die im Bezugssystem  $B$  die Frequenz  $f'_B$  annimmt und die Energie der Masse bestimmt.

Wir fassen die Postulate nun noch einmal zusammen:

Jedes massenbehaftete Teilchen kann entsprechend des ersten Postulats von DeBroglie auch als periodisches Phänomen mit der Frequenz  $f_A$  erscheinen. Ein relativ bewegter Beobachter  $B$  misst aufgrund der Zeitdilatation eine langsameres periodisches Phänomen der Frequenz  $f_B$ .

Zusätzlich wird jedes massenbehaftete Teilchen von einer Materiewelle begleitet, die die Energie der Masse beziehungsweise des periodischen Phänomens bestimmt. Die Frequenz der Materiewelle ist im Ruhesystem  $A$  des Teilchens  $f'_A = f_A$  und im relativ bewegten Bezugssystem  $B$   $f'_B$ . Dadurch kann jedes Teilchen äquivalent durch seine relativistische Masse  $M_B$  oder die Frequenz  $f'_B$  dargestellt werden, da die Energien  $E = M_B c^2$  und  $E = hf'_B$  identisch sind.

Wir bezeichnen von nun an die vom Bezugssystem unabhängige Frequenz des *inneren Puls* eines Teilchens als  $f_1 := \frac{Mc^2}{h} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ , wobei  $M$  die Ruhemasse des Teilchens und  $v$  die Relativgeschwindigkeit der Masse zum Beobachter ist. Die vom Bezugssystem unabhängige Frequenz der Materiewelle eines Teilchens bezeichnen wir von nun an als  $f_2 := \frac{Mc^2}{h} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

## 2. Phasen- und Gruppengeschwindigkeit der Materiewelle

Da die Materiewelle und die Teilchenposition überlagern, müssen der *innere Puls* und die Materiewelle am Ort, wo das Teilchen lokalisiert ist, in Phase sein. Ansonsten würde es ohne jegliche Wechselwirkung zu Interferenzen kommen, die die Materiewelle und somit auch die Energie des Teilchens beeinflussen würden.

Es soll nun gezeigt werden, dass eine Phasengleichheit von innerem Puls und Materiewelle bei einer Phasengeschwindigkeit der Materiewelle von  $v_{ph} = \frac{c^2}{v_T}$  ( $v_T =$  Teilchengeschwindigkeit) vorherrscht:

Nach der Zeit  $\Delta T$  hat der innere Puls die Phase

$$f_1 \cdot \Delta T = \frac{Mc^2}{h} \sqrt{1 - \frac{v_T^2}{c^2}} \cdot \Delta T := \frac{Mc^2}{h} \sqrt{1 - \beta^2} \cdot \frac{\Delta x}{\beta c}, \quad (4)$$

wobei  $\beta := \frac{v_T}{c}$  und  $\Delta x$  die Strecke ist, die das Teilchen in der Zeit  $\Delta T$  zurücklegt. Die Materiewelle bewege sich mit Phasengeschwindigkeit  $v_{ph} = \frac{c^2}{v_T}$  in Bewegungsrichtung des Teilchens. Die Phase des Punktes, an dem das Teilchen lokalisiert ist, ist dann

$$\begin{aligned} f_2 \cdot \left( \Delta T - \frac{\Delta x}{v_T} \right) &= \frac{Mc^2}{h} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \left( \frac{\Delta x}{\beta c} - \frac{\beta \Delta x}{c} \right) \\ &= \frac{Mc^2}{h} \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \Delta x \left( \frac{1 - \beta^2}{\beta c} \right) \\ &= \frac{Mc^2}{h} \sqrt{1 - \beta^2} \frac{\Delta x}{\beta c} \end{aligned} \quad (5)$$

Wie man sieht, sind die Phase des inneren Puls und der Materiewelle am Ort der Teilchenlokalisierung tatsächlich identisch, wenn sich die Materiewelle mit der Phasengeschwindigkeit  $v_{ph} = \frac{c^2}{v_T}$  in Bewegungsrichtung des Teilchens bewegt.

Die Wellenlänge der Materiewelle ist dann einfach

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{v_{ph}}{f_2} = \frac{c^2}{v_T} \frac{h}{Mc^2} \sqrt{1 - \beta^2} \\ &= \frac{h}{Mc\beta} \sqrt{1 - \beta^2}\end{aligned}\tag{6}$$

Jetzt kann auch die Gruppengeschwindigkeit  $v_{gr}$  der Materiewelle berechnet werden:

$$v_{gr} = \frac{dw}{dk} = \frac{\frac{df}{d\beta}}{\frac{d(\frac{1}{\lambda})}{d\beta}} = \frac{\frac{Mc^2}{h} \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}^3}}{\frac{Mc}{h} \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}^3}} = \beta c = v_T\tag{7}$$

Die Gruppengeschwindigkeit der Materiewelle entspricht also der Teilchengeschwindigkeit  $v_T$ . Für das Produkt der Phasengeschwindigkeit  $v_{ph}$  und der Gruppengeschwindigkeit  $v_{gr}$  erhält man also

$$v_{ph} \cdot v_{gr} = \frac{c^2}{v_T} \cdot v_T = c^2.\tag{8}$$

### 3. Die DeBroglie Beziehung

Mithilfe dieser Resultate lässt sich eine Beziehung zwischen der Wellenlänge und dem Impuls eines Teilchens herleiten. In der Teilcheninterpretation ist die Energie einer Masse  $M$  gegeben als  $E = Mc^2$  und der Impuls als  $p = Mv_T$ . Dann gilt

$$\begin{aligned}\frac{E}{c^2} &= \frac{p}{v_T} \\ E \cdot v_T &= p \cdot c^2 \\ E \cdot v_T &= p \cdot v_{gr} \cdot v_{ph} \\ E \cdot v_T &= p \cdot v_T \cdot v_{ph} \\ E &= p \cdot v_{ph} \\ h \cdot f &= p \cdot \lambda \cdot f \\ h &= p \cdot \lambda\end{aligned}\tag{9}$$

Jedem Teilchen mit Impuls  $p$  lässt sich also eine Materiewelle der Wellenlänge  $\lambda = \frac{h}{p}$  zuordnen. Diese Beziehung wird als DeBroglie-Beziehung bezeichnet.

### 4. Herleitung der Schrödingergleichung

In den letzten Abschnitten konnten wir für die Materiewelle bereits eine Frequenz, eine Wellenlänge und eine zugehörige Phasen- und Gruppengeschwindigkeit zuordnen. Die allgemeine Wellengleichung der Materiewelle lautet wegen der Beziehungen  $E = \hbar\omega$  und  $\vec{p} = \hbar\vec{k}$

$$\psi(\vec{r}, t) = \int F(\vec{p}) e^{\frac{i}{\hbar}(\vec{p}\vec{r} - Et)} d\vec{p}. \quad (10)$$

Diese Wellengleichung lässt sich bezüglich der Zeit  $t$  und bezüglich der Raumkoordinate  $\vec{r}$  ableiten. Wir erhalten dann

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) &= -\frac{i}{\hbar} E \psi(\vec{r}, t) \\ \Delta \psi(\vec{r}, t) &= -\frac{1}{\hbar^2} \vec{p}^2 \psi(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (11)$$

Mit der relativistischen Energie-Impuls-Beziehung  $\vec{p}^2 = 2m(E - V(\vec{r}, t))$  erhält man

$$\begin{aligned} E \psi(\vec{r}, t) &= -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta \psi(\vec{r}, t) + V(\vec{r}, t) \psi(\vec{r}, t) \\ \iff i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) &= \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta + V(\vec{r}, t) \right) \psi(\vec{r}, t) \end{aligned} \quad (12)$$

Dies ist die Schrödingergleichung. Diese Gleichung ist eine Bestimmungsgleichung für die Materiewelle eines Teilchens der Masse  $m$  im Potential  $V(\vec{r}, t)$ .

## 5. Experimentelle Hinweise auf die Existenz der Materiewelle und ihre Physikalische Interpretation

- Elektronenbeugung
- Ort des Teilchens nicht aus Materiewelle bestimmbar
- Herleitung des Unschärfepinzips (siehe Wikipedia Beugung am Einfachspalt)

## 6. Was kann man mit diesen ergebnissen bereits alles berechnen?

- energie, impuls operator. eigenfunktion ist wellenfunktion zum eigenwert  $E$  bzw.  $x_i$
- Atomphysik, Wasserstoff atom, entartung
- Tunneleffekt?
- Operatortheorie
- weitere Postulate der Quantenmechanik aber nicht statistische interpretation voraussetzen, denn das kann bohm auch erklären.
- Pauli-Prinzip?
- Klein Gordon, Dirac gleichung
- Quantenfeldtheorie?

- Webersche Elektrodynamik?

## **7. Wie gehts weiter?**

- determinismus, indeterminismus
- statistische interpretation der wellenfunktion vs führungswellen interpretation
- bohmsche mechanik vs. kopenhagener Deutung

## **8. Methoden**

## **9. Ergebnisse**

## **10. Diskussion**