

Das Zwölftonsystem (12-EDO) ist das tonal stabilste EDO-System

Nicolas Hamel

In dieser Arbeit wird zunächst ein mathematisches Kriterium eingeführt, mit dessen Hilfe sich der tonale Zusammenhalt eines beliebigen Tonsystems quantitativ erfassen lässt. Für den tonalen Zusammenhalt eines Tonsystems werden zwei zentrale Aspekte als besonders wichtig erachtet. Zum einen ist entscheidend, in welchem Umfang die Obertöne der systemeigenen Töne innerhalb des Systems selbst realisiert sind. Ein Tonsystem, in dem zu jedem Ton beispielsweise auch seine Quinte als erster fremder Oberton enthalten ist, weist demnach einen höheren Grad an Stabilität auf als ein System, in dem keine weiteren Obertöne innerhalb des Tonsystems enthalten sind. Zum anderen ist von Bedeutung, dass ein Tonsystem insgesamt nicht zu viele Töne umfasst, da mit zunehmender Systemgröße der Anteil jener systemeigenen Töne wächst, zu denen ein beliebiger Ton keine Verwandtschaft im Sinne der Obertonreihe aufweist. Ein zu großes Tonsystem kann daher den relativen Grad tonaler Kohärenz verringern. Es wird gezeigt, dass 12-EDO unter bestimmten Voraussetzungen nicht nur das kleinste Tonsystem darstellt, in dem eine wesentliche Anzahl der Obertöne jedes Tons realisiert ist, sondern darüber hinaus auch das Verhältnis obertonverwandter interner Tonbeziehungen zur Gesamtzahl aller Tonbeziehungen innerhalb des Systems unter bestimmten Voraussetzungen maximiert.

Keywords: EDO; 12-EDO; twelve-tone-system; tonal stability; stable tone-system; algorithmic music theory

1. Einleitung

Gleichstufige Tonsysteme mit Oktavteilung (*Equal Divisions of the Octave*, EDO) bilden eine Klasse von Stimmungssystemen, in denen die Oktave in eine feste Anzahl gleich großer Intervalle unterteilt wird [ref]. Ein EDO-System ist durch eine natürliche Zahl N definiert, die angibt, dass die Oktave in N gleich große Intervalle zerlegt wird [ref]. Innerhalb dieser Systemfamilie nimmt das Zwölftonsystem in gleichstufiger Stimmung (12-EDO) eine besondere Stellung ein, da es seit dem 18. Jahrhundert die tonale und theoretische Grundlage eines Großteils der westlichen Musik bildet [ref]. Seine weite Verbreitung hat kompositorische Praxis, Instrumentenbau und musiktheoretische Modellbildung nachhaltig geprägt [ref].

Über 12-EDO hinaus existiert jedoch eine Vielzahl alternativer EDO-Systeme, die sowohl in theoretischen als auch in experimentellen und kompositorischen Kontexten untersucht und eingesetzt wurden [ref]. Diese Systeme unterscheiden sich in der Größe ihrer Intervalle und damit in der Art und Weise, wie harmonische Verhältnisse approximiert werden. Entsprechend ergeben sich unterschiedliche Skalenstrukturen, Intervallbeziehungen und wahrnehmungsbezogene Eigenschaften, die das musikalische Potenzial eines jeweiligen Systems maßgeblich beeinflussen. In diesem Zusammenhang haben EDO-Systeme insbesondere in der Mikrotonalität, der zeitgenössischen Komposition sowie in der computergestützten Musiktheorie zunehmende Aufmerksamkeit erfahren [ref].

Während sich frühere Untersuchungen häufig auf Aspekte der Intervallgenauigkeit, der Annäherung an reine Intervalle oder auf psychoakustische Fragestellungen konzentriert haben, wurde der innere tonale Zusammenhalt verschiedener EDO-Systeme bislang vergleichsweise wenig systematisch betrachtet [ref]. Insbesondere bleibt offen, inwiefern sich Kriterien der Stabilität oder des tonalen Zusammenhalts über unterschiedliche EDO-Systeme hinweg formulieren lassen. Diese Aspekte stehen jedoch in engem Zusammenhang mit der praktischen Anwendbarkeit eines Tonsystems, da der tonale Zusammenhalt eine zentrale Rolle für Skalenbildung, melodische Orientierung sowie für die Ausbildung von Spannung und Auflösung spielt [ref].

Die vorliegende Arbeit greift diese Fragestellung auf, indem ein Kriterium vorgestellt wird, mit dem sich der tonale Zusammenhalt eines beliebigen Tonsystems quantitativ erfassen lässt. Dabei wird 12-EDO nicht voraussetzungslos privilegiert, sondern innerhalb des größeren Raums gleichstufiger Oktavteilungen verortet. Ziel ist es zu untersuchen, inwieweit die im 12-EDO beobachtete hohe tonale Stabilität als Sonderfall aus allgemeineren strukturellen Bedingungen hervorgeht.

2. Methoden

2.1. Berechnung und Darstellung der relevanten EDO-Systeme

Da bereits bei einer Einteilung der Oktave in 80 gleichgroße Intervalle jedes Intervall zwischen zwei benachbarten Tönen nur noch lediglich 15 Cent beträgt (da $1200 \text{ Cent} / 80 = 15 \text{ Cent}$) und das

praktische Unterscheidungsvermögen zweier Töne ab einem solchen Tonhöhenunterschied deutlich nachlässt, sind solch große Systeme für die Wahl eines geeigneten Tonsystems völlig ungeeignet. Daher beschränken wir uns in dieser Untersuchung auf die Analyse der ersten 80 EDO-Systeme.

Eine geeignete Darstellung eines EDO-Systems, die sich auch für weitere Berechnungen als nützlich erweist, stellt ein N-EDO-System als Liste der N verschiedenen systemeigenen Tonhöhen dar, wobei jeder dieser Tonhöhen durch sein Intervall (in Cent) zum Grundton festgelegt wird. Bei gleichmäßiger Unterteilung der Oktave – die 1200 Cent entspricht – ergibt sich für ein N-EDO-System somit die Liste

$$\left[0, \frac{1200}{N}, 2 \cdot \frac{1200}{N}, \dots, (N-1) \cdot \frac{1200}{N}\right].$$

So wird beispielsweise 5-EDO mit $N = 5$ als die Liste $[0, 240, 480, 720, 960]$ dargestellt, während 12-EDO mit $N = 12$ als $[0, 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1000, 1100]$ dargestellt wird. Anhand von 12-EDO können wir diese Darstellung wie folgt interpretieren: Angenommen im gleichstufigen Zwölftonsystem sei der Ton C auf 0 Cent geeicht, dann ist der nächsthöhere Ton das Db, der genau 100 Cent zum Ton C entfernt ist. Der nächsthöhere Ton D ist 200 Cent vom C entfernt. Danach folgt der Ton Eb mit einer Abweichung zum Ton C von 300 Cent usw. Da die Tonhöhe C als 0 Cent bereits in der Liste enthalten ist, wird das C eine Oktave höher nicht zusätzlich als 1200 Cent mit in die Liste aufgenommen. Das Zwölftonsystem in der gleichstufigen Stimmung entspricht also, wie zu erwarten war, der Liste für 12-EDO, wenn der erste Eintrag der Liste als der Ton C aufgefasst wird. Jedes EDO-System enthält nur die Information über die Intervalleinteilung der Oktave und ist nicht auf spezifische Tonhöhen festgelegt.

Anhand dieser Listen kann man feststellen, ob bestimmte Intervalle, wie die reine Quinte oder die reine große Terz, im EDO-System vorkommen. Betrachten wir dazu beispielsweise noch einmal die Liste von 12-EDO: Die reine Quinte umfasst 702 Cent. Dieses Intervall berechnet sich mit einer Abweichung von -2 Cent in der Liste von 12-EDO als 700 Cent zwischen dem 8. und 1. Eintrag, da $700 - 0 = 700$. Hierbei handelt es sich um die gleichstufige Quinte zwischen den Tönen C und G beispielsweise. Das selbe Intervall tritt aber auch zwischen dem 10. und 3. Eintrag, oder auch dem 12. und 5. Eintrag auf, da $900 - 200 = 700$ beziehungsweise $1100 - 400 = 700$. Man stellt fest, dass zu jedem Ton des Systems ein weiterer Ton im System enthalten ist, der um 700 Cent entfernt

liegt. Das liegt gerade an der Symmetrie der EDO-Systeme und gilt auch für jedes weitere Intervall das im jeweiligen EDO-System vorkommt. Alle Töne eines EDO-Systems weisen identische Intervallbeziehungen zum restlichen Tonmaterial auf und sind somit auch gleich stabil in das Tonsystem eingebunden [ref].

Um alle EDO-Systeme bis einschließlich 80-EDO zu berechnen, wurde in der Programmiersprache Python ein Algorithmus implementiert, der in Anhang [A.1.] abgebildet ist. Die Funktion `compute_EDO_systems(max_divisor)` enthält als Input einen maximalen Teiler des Oktavintervalls, der in unserer Untersuchung wie bereits besprochen auf 80 gesetzt wurde und berechnet daraufhin die Listen aller entsprechender EDO-Systeme, die als `all_EDO_systems` ausgegeben werden.

Da es Ziel der Arbeit ist, zu untersuchen, welches EDO-System den größten tonalen Zusammenhalt aufweist, werden im nächsten Schritt alle EDO-Systeme aus der Liste `all_EDO_systems` herausgefiltert, in denen sich die systemeigenen Töne nicht periodisch in Quinten sortieren lassen. Diese Forderung hat den Zweck, dass nur die EDO-Systeme für die weiteren Untersuchungen übrig bleiben, in denen für jeden systemeigenen Ton auch die zugehörige Quinte – also der erste Oberton – im System enthalten ist. Diese Eigenschaft gewährleistet den Tönen und somit auch dem System selbst ein gewisses Maß an tonalem Zusammenhalt. Tonsysteme, die diese Eigenschaft aufweisen, nennen wir im Folgenden quintperiodisch. 12-EDO ist ein Beispiel für ein quintperiodisches EDO-System, da, wie bereits weiter oben besprochen, die reine Quinte jedes Tons mit einer Abweichung von -2 Cent wiederum im System enthalten ist. Wir werden an dieser Stelle fordern, dass für die Erfüllung dieser Bedingung, eine Abweichung von ± 5 Cent zwischen reiner und systemeigener Quinte nicht überschritten werden darf, um eine grobe Ununterscheidbarkeit der beiden Intervalle in der musikalischen Praxis sicherzustellen. Viele EDO-Systeme enthalten zwar auch ein Intervall, dass sehr nah an das reine Intervall der Quinte herankommt, aber die maximal erlaubte Abweichung dennoch überschreitet und somit nicht als quintperiodisch gemäß unserer Definition gilt. Die Wahl einer maximalen Abweichung von ± 5 Cent ist hier aus rein empirischen Gründen gewählt und könnte beliebig verändert werden, solange es der Anspruch ist, die Ununterscheidbarkeit der beiden Intervalle durch die Wahl sicherzustellen. In Folge einer Anpassung würden aber selbstverständlich mehr, beziehungsweise weniger EDO-Systeme die Eigenschaft der Quintperiodizität erfüllen, die für die weiteren Untersuchungen in Betracht gezogen werden müssen.

Für die Berechnung der quintperiodischen EDO-Systeme wurde die Funktion `compute_fifth_circular_EDO_systems(list_of_systems, max_deviation)` definiert, die als Input eine Liste von EDO-Systemen erhält und nur die Systeme wieder ausgibt, die eine Quintperiodizität aufweisen wobei die maximal erlaubte Abweichung von der reinen Quinte durch `max_deviation` als weiterer Input angegeben werden muss [A.2.]. In dieser Arbeit gilt für die Quinte (also den ersten Oberton) stets `max_deviation = 5`.

2.2. Wie Misst man den Tonalen Zusammenhalt eines Tonsystems?

Die bis hierhin berechneten EDO-Systeme weisen aufgrund ihrer Quintperiodizität bereits ein gewisses Maß an tonalem Zusammenhalt auf, da der erste Oberton jedes systemeigenen Tons wiederum im System enthalten ist. Wir können nun prüfen, wie viele zusätzliche Obertöne eines jeden Tons im System enthalten sind. Dabei wird angenommen, dass ein System grundsätzlich stabiler ist, desto mehr Obertöne der systemeigenen Töne in diesem System enthalten sind. Neben der reinen Quinte von 702 Cent enthält die Obertonreihe unter den ersten 16 Teiltönen (also in dem für die musikalische Praxis relevanten Bereich) noch sechs weitere Tonhöhenklassen von Obertönen, denen ein spezifisches Intervall zum Grundton zukommt [ref]. Die Obertonklassen und ihr spezifisches Intervall zum Grundton sind in Abbildung [2.1] aufgeführt.

Intervall zum Grundton (in Cent)	Obertonklasse
702	Erster Oberton (reine Quinte)
386	Zweiter Oberton (reine große Terz)
969	Dritter Oberton (reine kleine Septime)
204	Vierter Oberton (reiner Ganzton)
551	Fünfter Oberton
841	Sechster Oberton
1088	Siebter Oberton (reine große Septime)

Abbildung 2.1. Übersicht der sieben Obertonklassen und ihr Intervall zum Grundton in Cent

Auch für diese Obertonklassen können wir eine maximal erlaubte Abweichung festlegen, für die das systemspezifische Intervall vom reinen Intervall der entsprechenden Obertonklasse abweichen darf, damit es noch als dieses aufgefasst werden kann. Um das zu verdeutlichen, betrachten wir noch einmal die Liste von 12-EDO: Wie wir durch Vergleich der Intervalle der Obertonklassen aus Abbildung [2.1.] und den systemeigenen Intervallen von 12-EDO feststellen, enthält 12-EDO

zusätzlich zur reinen Quinte mit einer Abweichung von -2 Cent ebenfalls die reine große Terz jedes Tons mit einer Abweichung von +14 Cent sowie den reinen Ganzton jedes Tons mit einer Abweichung von -4 Cent und die reine große Septime jedes Tons mit einer Abweichung von -12 Cent. Somit sind in 12-EDO insgesamt vier Obertöne zu jedem Ton mit einer Abweichung von maximal 14 Cent wiederum im System enthalten. Aufgrund der Symmetrie der EDO-Systeme ist die Anzahl der Töne, von denen ein bestimmter Ton ein Oberton ist, identisch mit der Anzahl der Obertöne die zu einem Ton im System enthalten sind [ref]. Ein Ton im EDO-System ist also immer von genau so vielen Tönen Oberton, wie Obertöne von ihm im System enthalten sind [ref]. Da in 12-EDO vier verschiedene Obertöne implementiert sind, ist jeder Ton auch von vier weiteren Tönen im System ein Oberton und weist somit zu insgesamt acht der zwölf systemeigenen Töne eine tonale Verwandtschaft bezüglich der Obertonreihe auf. Wir fassen zusammen: Wenn M die Anzahl der im EDO-System implementierten Obertonklassen ist, so weist jeder Ton im System zu insgesamt $2 \cdot M$ Tönen im System eine tonale Verwandtschaft bezüglich der Obertonreihe auf. Ein Maß für den tonalen Zusammenhalt eines EDO-Systems ist dann durch den Wert $R = \frac{2 \cdot M}{N - 1}$

gegeben, den wir als Relative-Relation definieren und der die relative Anzahl der Verwandtschaftsbeziehungen eines Tons im EDO-System berechnet (wobei N die Anzahl der Töne im N -EDO-System ist). Ein R -Wert von beispielsweise $R = 0,63$ würde bedeuten, dass ein Ton im jeweiligen System zu 63% der restlichen Töne eine Obertonverwandtschaft aufweist, während ein R -Wert von $R = 1$ bedeuten würde, dass ein systemeigener Ton zu allen restlichen Tönen eine Verwandtschaft bezüglich der Obertonreihe hat. Für $R = 0$ gibt es selbstverständlich überhaupt keine Verwandtschaftsbeziehungen zwischen den systemeigenen Tönen. Ein hoher R -Wert spricht demnach für ein hohes Maß an tonalem Zusammenhalt, während ein kleiner R -Wert für das Gegenteil spricht.

Der Wert M – also die Anzahl der implementierten Obertöne im EDO-System – hängt natürlich von der maximal erlaubten Abweichung des systemspezifischen Intervalls zum reinen Intervall der Obertonreihe ab. Wenn die maximal erlaubte Abweichung hoch angesetzt ist, sind in der Regel mehr Obertöne im System implementiert, als wenn diese geringer angesetzt ist.

2.3. Algorithmische Implementierung der Relative-Relation

Mithilfe der in Anhang [A.3.] dargestellten Funktion `compute_relative_relation_EDO_system(list_of_systems, max_deviation)` wird die Relative-Relation für jedes EDO-System aus der Input-Liste `list_of_systems` berechnet, wobei die maximal erlaubte Abweichung zwischen dem Intervall einer Obertonklasse und dem entsprechenden Intervall im System kleiner als der festzulegende Wert `max_deviation` sein muss.

3. Ergebnisse

3.1. Berechnung aller Quintperiodischen EDO-Systeme bis 80-EDO

Die berechneten EDO-Systeme, die eine Quintperiodizität der systemeigenen Töne aufweisen, sind in Anhang [B.1.] bis einschließlich 80-EDO gelistet. Die systemspezifische Quinte, also das Intervall, das innerhalb des Systems eine Abweichung von < 5 Cent zur reinen Quinte (702 Cent) aufweist, ist in Anhang [B.1.] jeweils rot markiert. Dieses Intervall entspricht bei einer vollständigen quintperiodischen Sortierung des Tonmaterials des jeweiligen EDO-Systems dem Abstand der Töne.

3.2. Relative-Relation für verschiedene Maximale Abweichungen

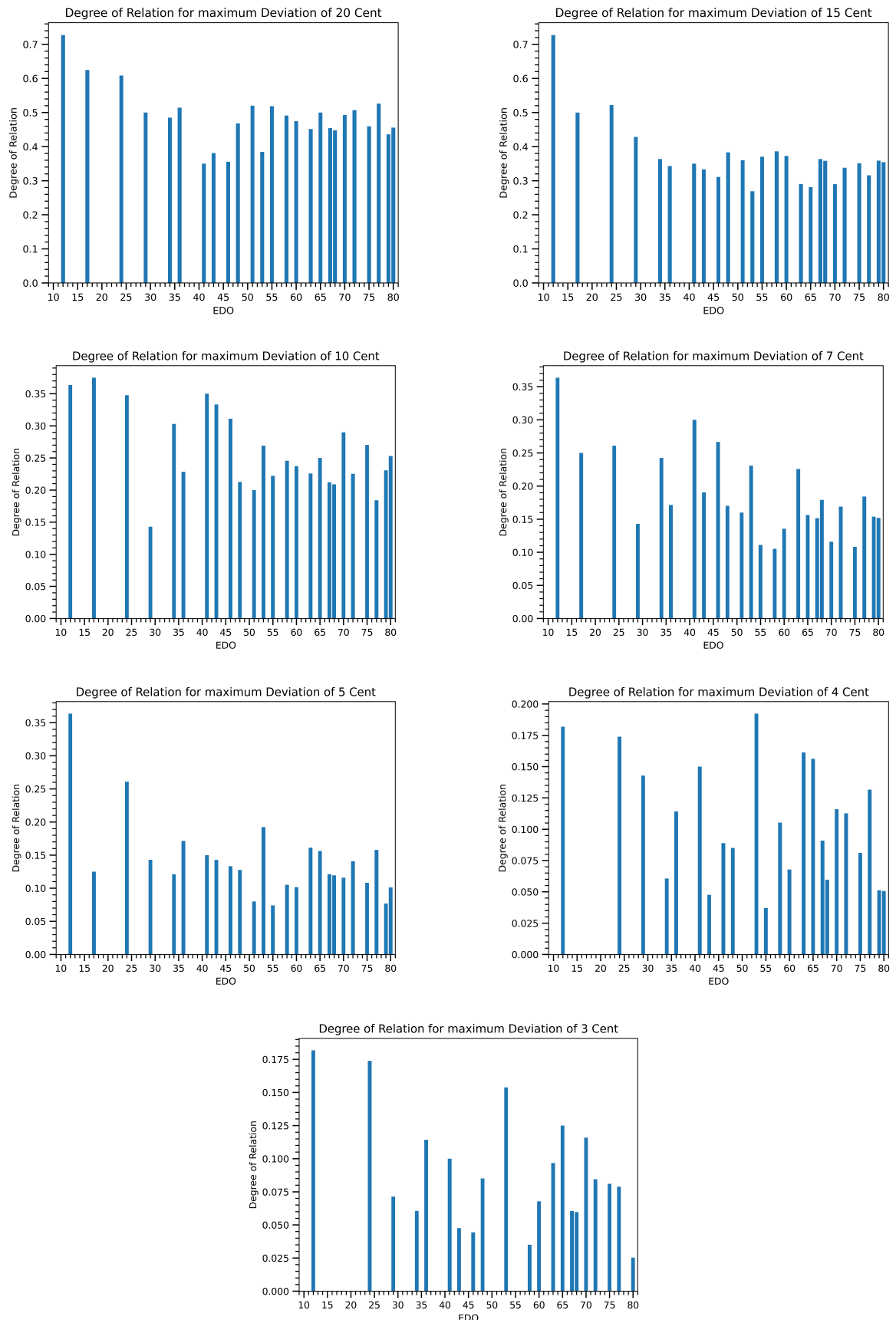


Abbildung 3.1. Relative-Relation within each EDO-System for different maximum deviations. Die EDO-Systeme sind nach Anzahl N der Töne auf der x-Achse aufgetragen. Der R-Wert ist auf der y-Achse aufgetragen.

In Abbildung [3.1] ist die Relative-Relation für alle berechneten quintperiodischen EDO-Systeme grafisch aufgetragen. Die einzelnen Grafiken unterscheiden sich ausschließlich in der angenommenen Maximum Deviation, wie sie im letzten Abschnitt definiert wurde. So ist in der Grafik oben links beispielsweise die Relative Relation aller EDO-Systeme unter der Bedingung aufgetragen, dass eine Obertonverwandtschaft zweier Töne nur dann als solche gezählt wird, wenn die Abweichung zwischen ihrem Intervall im System und dem reinen Intervall der Obertonreihe kleiner als 20 Cent ist.

4. Diskussion

4.1. Untersuchung der quintperiodischen EDO-Systeme

Ab 40-EDO weist im Mittel bereits ungefähr jedes zweite größere System eine Quintperiodizität auf, während zwischen 1-EDO und 20-EDO nur lediglich 2 Systeme (12-EDO und 17-EDO) diese Eigenschaft aufweisen. Diese Beobachtung war zu erwarten, da mit steigender Systemgröße auch die Anzahl der im System enthaltenen Intervalle steigt und somit in häufigeren Fällen auch die ungefähre reine Quinte enthalten ist.

Darüber hinaus sind alle EDO-Systeme die kleiner sind als 12-EDO nicht quintperiodisch, was 12-EDO zum kleinsten quintperiodischen EDO-System macht. Aber auch höhere EDO-Systeme wie 18-EDO, oder 76-EDO weisen diese Eigenschaft nicht auf. Insgesamt gibt es unter den ersten 80-EDO-Systemen 25 quintperiodische Systeme.

4.2. Die Relative-Relation der EDO-Systeme im Vergleich

In Abbildung [3.1] erkennt man, dass 12-EDO für eine maximal erlaubte Abweichung von 20, 15, 7, 5 und 3 Cent den höchsten R-Wert aufweist. Für eine maximale Abweichung von 20 und 15 Cent entspricht der R-Wert von 12-EDO mit $R \approx 0,73$ dem höchsten R-Wert unter allen EDO-Systemen. Das System mit dem nächsthöheren R-Wert von „lediglich“ $R \approx 0,52$ weist 24-EDO auf. Solange wir also eine maximale Abweichung von 15 Cent (genauer genommen 14 Cent) zwischen dem zugehörigen Intervall einer Obertonklasse und einem entsprechenden systemspezifischen Intervall

tolieren, ist das 12-EDO System hinsichtlich unseres Kriteriums das mit Abstand stabilste und tonal Zusammenhängendste EDO-System.

Für eine maximale Abweichung von 10 Cent fällt der R-Wert des 12-EDO Systems jedoch deutlich, da innerhalb von 12-EDO sowohl die große Terz mit einer Abweichung von +14 Cent zur reinen großen Terz als auch die große Septime mit einer Abweichung von -12 Cent nicht mehr zu den Obertonverwandtschaften gezählt werden. In diesem Fall weist 17-EDO mit $R \approx 0,38$ den höchsten R-Wert auf, wobei 12-EDO mit $R \approx 0,36$ weiterhin dicht folgt.

Für eine maximale Abweichung von 7 und 5 Cent weist 12-EDO mit weiterhin $R \approx 0,36$ wieder den höchsten R-Wert auf, da in den anderen EDO-Systemen einige Obertonbeziehungen durch die Senkung der maximalen Abweichung weggefallen sind.

Für eine maximale Abweichung von 4 Cent fällt in 12-EDO die große Sekunde weg, die mit einer Abweichung von gerade -4 Cent von der reinen großen Sekunde nicht mehr zu den implementierten Obertönen gezählt wird. Mit $R \approx 0,18$ weist 12-EDO aber trotzdem noch einen der höchsten R-Werte auf. Bei 3 Cent maximaler Abweichung hat 12-EDO wieder den höchsten R-Wert.

4.3. Vergleich der Gemittelten R-Werte der EDO-Systeme

Wir können die R-Werte der EDO-Systeme über die verschiedenen maximal erlaubten Abweichungen Mitteln und dann gegeneinander grafisch auftragen. Dafür berechnen wir aber die R-Werte der EDO-Systeme für alle ganzzahligen maximalen Abweichungen zwischen 1 und 20. Dieses Resultat ist in Abbildung [4.1.] dargestellt.

In der Abbildung [4.1.] ist zu erkennen das 12-EDO bezüglich des gemittelten R-Werte über alle relevanten maximal erlaubten Abweichungen mit einem R-Wert von $R \approx 0,42$ tatsächlich das höchste Maß an innerem tonalen Zusammenhalt aufweist. Den zweitgrößten gemittelten R-Wert weist das doppelt so große Vierteltonsystem 24-EDO mit $R \approx 0,33$.

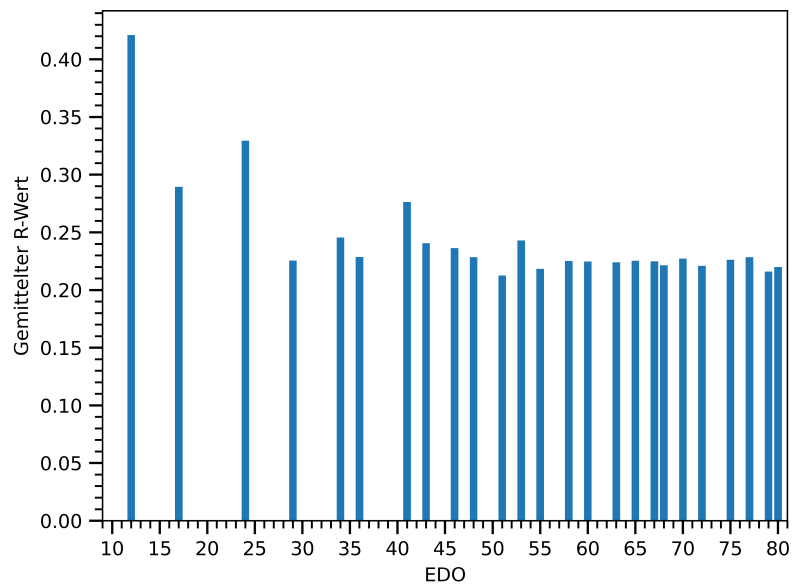


Abbildung 4.1. Gemittelter R-Wert der quintperiodischen EDO-Systeme für ganzzahlige maximal erlaubte Abweichungen von 1 bis 20.

References

Appendices

Appendix A.1.

```
def compute_ED0_systems(max_divisor):  
    all_ED0_systems = []  
  
    for i in range(2, max_divisor + 1):  
        ED0_system = []  
        smallest_interval = 1200 / i  
  
        for j in range(0, i):  
            next_note = round(smallest_interval * j)  
            ED0_system.append(next_note)  
  
        all_ED0_systems.append(ED0_system)  
  
    return all_ED0_systems
```

Appendix A.2.

```
def compute_ED0_systems(max_divisor):  
    all_ED0_systems = []  
  
    for i in range(2, max_divisor + 1):  
        ED0_system = []  
        smallest_interval = 1200 / i  
  
        for j in range(0, i):  
            next_note = round(smallest_interval * j)  
            ED0_system.append(next_note)  
  
        all_ED0_systems.append(ED0_system)  
  
    return all_ED0_systems  
  
def compute_fifth_circular_ED0_systems(list_of_systems, max_deviation):  
    all_fifth_circular_ED0_systems = []  
  
    for system in list_of_systems:  
        for intervall in system:  
            if abs(intervall - erster_oberton) < max_deviation:  
                all_fifth_circular_ED0_systems.append(system)  
                break  
  
    return all_fifth_circular_ED0_systems
```

Appendix A.3.

```
def compute_relative_relation_ED0_system(list_of_systems, max_deviation):  
    list_degree_of_relation = []  
    for system in list_of_systems:  
        number_of_relations = 0  
        for interval in system:  
            if abs(interval - erster_oberton) < max_deviation:  
                number_of_relations += 1  
            if abs(interval - zweiter_oberton) < max_deviation:  
                number_of_relations += 1  
            if abs(interval - dritter_oberton) < max_deviation:  
                number_of_relations += 1  
            if abs(interval - vierter_oberton) < max_deviation:  
                number_of_relations += 1  
            if abs(interval - fünfter_oberton) < max_deviation:  
                number_of_relations += 1  
            if abs(interval - sechster_oberton) < max_deviation:  
                number_of_relations += 1  
            if abs(interval - siebter_oberton) < max_deviation:  
                number_of_relations += 1  
        degree_of_relations = (number_of_relations * 2) / (len(system) - 1)  
        list_degree_of_relation.append(degree_of_relations)  
  
    return list_degree_of_relation
```

Appendix B.1. (All Fifth-Circular EDO-Systems up to 80-EDO)

Intervals in 12-EDO:

[0, 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900, 1000, 1100]

Intervals in 17-EDO:

[0, 71, 141, 212, 282, 353, 424, 494, 565, 635, 706, 776, 847, 918, 988, 1059, 1129]

Intervals in 24-EDO:

[0, 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, 400, 450, 500, 550, 600, 650, 700, 750, 800, 850, 900, 950, 1000, 1050, 1100, 1150]

Intervals in 29-EDO:

[0, 41, 83, 124, 166, 207, 248, 290, 331, 372, 414, 455, 497, 538, 579, 621, 662, 703, 745, 786, 828, 869, 910, 952, 993, 1034, 1076, 1117, 1159]

Intervals in 34-EDO:

[0, 35, 71, 106, 141, 176, 212, 247, 282, 318, 353, 388, 424, 459, 494, 529, 565, 600, 635, 671, 706, 741, 776, 812, 847, 882, 918, 953, 988, 1024, 1059, 1094, 1129, 1165]

Intervals in 36-EDO:

[0, 33, 67, 100, 133, 167, 200, 233, 267, 300, 333, 367, 400, 433, 467, 500, 533, 567, 600, 633, 667, 700, 733, 767, 800, 833, 867, 900, 933, 967, 1000, 1033, 1067, 1100, 1133, 1167]

Intervals in 41-EDO:

[0, 29, 59, 88, 117, 146, 176, 205, 234, 263, 293, 322, 351, 380, 410, 439, 468, 498, 527, 556, 585, 615, 644, 673, 702, 732, 761, 790, 820, 849, 878, 907, 937, 966, 995, 1024, 1054, 1083, 1112, 1141, 1171]

Intervals in 43-EDO:

[0, 28, 56, 84, 112, 140, 167, 195, 223, 251, 279, 307, 335, 363, 391, 419, 447, 474, 502, 530, 558, 586, 614, 642, 670, 698, 726, 753, 781, 809, 837, 865, 893, 921, 949, 977, 1005, 1033, 1060, 1088, 1116, 1144, 1172]

Intervals in 46-EDO:

[0, 26, 52, 78, 104, 130, 157, 183, 209, 235, 261, 287, 313, 339, 365, 391, 417, 443, 470, 496, 522, 548, 574, 600, 626, 652, 678, 704, 730, 757, 783, 809, 835, 861, 887, 913, 939, 965, 991, 1017, 1043, 1070, 1096, 1122, 1148, 1174]

Intervals in 48-EDO:

[0, 25, 50, 75, 100, 125, 150, 175, 200, 225, 250, 275, 300, 325, 350, 375, 400, 425, 450, 475, 500, 525, 550, 575, 600, 625, 650, 675, 700, 725, 750, 775, 800, 825, 850, 875, 900, 925, 950, 975, 1000, 1025, 1050, 1075, 1100, 1125, 1150, 1175]

Intervals in 51-EDO:

[0, 24, 47, 71, 94, 118, 141, 165, 188, 212, 235, 259, 282, 306, 329, 353, 376, 400, 424, 447, 471, 494, 518, 541, 565, 588, 612, 635, 659, 682, 706, 729, 753, 776, 800, 824, 847, 871, 894, 918, 941, 965, 988, 1012, 1035, 1059, 1082, 1106, 1129, 1153, 1176]

Intervals in 53-EDO:

[0, 23, 45, 68, 91, 113, 136, 158, 181, 204, 226, 249, 272, 294, 317, 340, 362, 385, 408, 430, 453, 475, 498, 521, 543, 566, 589, 611, 634, 657, 679, 702, 725, 747, 770, 792, 815, 838, 860, 883, 906, 928, 951, 974, 996, 1019, 1042, 1064, 1087, 1109, 1132, 1155, 1177]

Intervals in 55-EDO:

[0, 22, 44, 65, 87, 109, 131, 153, 175, 196, 218, 240, 262, 284, 305, 327, 349, 371, 393, 415, 436, 458, 480, 502, 524, 545, 567, 589, 611, 633, 655, 676, 698, 720, 742, 764, 785, 807, 829, 851, 873, 895, 916, 938, 960, 982, 1004, 1025, 1047, 1069, 1091, 1113, 1135, 1156, 1178]

Intervals in 58-EDO:

[0, 21, 41, 62, 83, 103, 124, 145, 166, 186, 207, 228, 248, 269, 290, 310, 331, 352, 372, 393, 414, 434, 455, 476, 497, 517, 538, 559, 579, 600, 621, 641, 662, 683, 703, 724, 745, 766, 786, 807, 828, 848, 869, 890, 910, 931, 952, 972, 993, 1014, 1034, 1055, 1076, 1097, 1117, 1138, 1159, 1179]

Intervals in 60-EDO:

[0, 20, 40, 60, 80, 100, 120, 140, 160, 180, 200, 220, 240, 260, 280, 300, 320, 340, 360, 380, 400, 420, 440, 460, 480, 500, 520, 540, 560, 580, 600, 620, 640, 660, 680, 700, 720, 740, 760, 780, 800, 820, 840, 860, 880, 900, 920, 940, 960, 980, 1000, 1020, 1040, 1060, 1080, 1100, 1120, 1140, 1160, 1180]

Intervals in 63-ED0:

[0, 19, 38, 57, 76, 95, 114, 133, 152, 171, 190, 210, 229, 248, 267, 286, 305, 324, 343, 362, 381, 400, 419, 438, 457, 476, 495, 514, 533, 552, 571, 590, 610, 629, 648, 667, 686, 705, 724, 743, 762, 781, 800, 819, 838, 857, 876, 895, 914, 933, 952, 971, 990, 1010, 1029, 1048, 1067, 1086, 1105, 1124, 1143, 1162, 1181]

Intervals in 65-ED0:

[0, 18, 37, 55, 74, 92, 111, 129, 148, 166, 185, 203, 222, 240, 258, 277, 295, 314, 332, 351, 369, 388, 406, 425, 443, 462, 480, 498, 517, 535, 554, 572, 591, 609, 628, 646, 665, 683, 702, 720, 738, 757, 775, 794, 812, 831, 849, 868, 886, 905, 923, 942, 960, 978, 997, 1015, 1034, 1052, 1071, 1089, 1108, 1126, 1145, 1163, 1182]

Intervals in 67-ED0:

[0, 18, 36, 54, 72, 90, 107, 125, 143, 161, 179, 197, 215, 233, 251, 269, 287, 304, 322, 340, 358, 376, 394, 412, 430, 448, 466, 484, 501, 519, 537, 555, 573, 591, 609, 627, 645, 663, 681, 699, 716, 734, 752, 770, 788, 806, 824, 842, 860, 878, 896, 913, 931, 949, 967, 985, 1003, 1021, 1039, 1057, 1075, 1093, 1110, 1128, 1146, 1164, 1182]

Intervals in 68-ED0:

[0, 18, 35, 53, 71, 88, 106, 124, 141, 159, 176, 194, 212, 229, 247, 265, 282, 300, 318, 335, 353, 371, 388, 406, 424, 441, 459, 476, 494, 512, 529, 547, 565, 582, 600, 618, 635, 653, 671, 688, 706, 724, 741, 759, 776, 794, 812, 829, 847, 865, 882, 900, 918, 935, 953, 971, 988, 1006, 1024, 1041, 1059, 1076, 1094, 1112, 1129, 1147, 1165, 1182]

Intervals in 70-ED0:

[0, 17, 34, 51, 69, 86, 103, 120, 137, 154, 171, 189, 206, 223, 240, 257, 274, 291, 309, 326, 343, 360, 377, 394, 411, 429, 446, 463, 480, 497, 514, 531, 549, 566, 583, 600, 617, 634, 651, 669, 686, 703, 720, 737, 754, 771, 789, 806, 823, 840, 857, 874, 891, 909, 926, 943, 960, 977, 994, 1011, 1029, 1046, 1063, 1080, 1097, 1114, 1131, 1149, 1166, 1183]

Intervals in 72-ED0:

[0, 17, 33, 50, 67, 83, 100, 117, 133, 150, 167, 183, 200, 217, 233, 250, 267, 283, 300, 317, 333, 350, 367, 383, 400, 417, 433, 450, 467, 483, 500, 517, 533, 550, 567, 583, 600, 617, 633, 650, 667, 683, 700, 717, 733, 750, 767, 783, 800, 817, 833, 850, 867, 883, 900, 917, 933, 950, 967, 983, 1000, 1017, 1033, 1050, 1067, 1083, 1100, 1117, 1133, 1150, 1167, 1183]

Intervals in 75-ED0:

[0, 16, 32, 48, 64, 80, 96, 112, 128, 144, 160, 176, 192, 208, 224, 240, 256, 272, 288, 304, 320, 336, 352, 368, 384, 400, 416, 432, 448, 464, 480, 496, 512, 528, 544, 560, 576, 592, 608, 624, 640, 656, 672, 688, 704, 720, 736, 752, 768, 784, 800, 816, 832, 848, 864, 880, 896, 912, 928, 944, 960, 976, 992, 1008, 1024, 1040, 1056, 1072, 1088, 1104, 1120, 1136, 1152, 1168, 1184]

Intervals in 77-ED0:

[0, 16, 31, 47, 62, 78, 94, 109, 125, 140, 156, 171, 187, 203, 218, 234, 249, 265, 281, 296, 312, 327, 343, 358, 374, 390, 405, 421, 436, 452, 468, 483, 499, 514, 530, 545, 561, 577, 592, 608, 623, 639, 655, 670, 686, 701, 717, 732, 748, 764, 779, 795, 810, 826, 842, 857, 873, 888, 904, 919, 935, 951, 966, 982, 997, 1013, 1029, 1044, 1060, 1075, 1091, 1106, 1122, 1138, 1153, 1169, 1184]

Intervals in 79-ED0:

[0, 15, 30, 46, 61, 76, 91, 106, 122, 137, 152, 167, 182, 197, 213, 228, 243, 258, 273, 289, 304, 319, 334, 349, 365, 380, 395, 410, 425, 441, 456, 471, 486, 501, 516, 532, 547, 562, 577, 592, 608, 623, 638, 653, 668, 684, 699, 714, 729, 744, 759, 775, 790, 805, 820, 835, 851, 866, 881, 896, 911, 927, 942, 957, 972, 987, 1003, 1018, 1033, 1048, 1063, 1078, 1094, 1109, 1124, 1139, 1154, 1170, 1185]

Intervals in 80-ED0:

[0, 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, 135, 150, 165, 180, 195, 210, 225, 240, 255, 270, 285, 300, 315, 330, 345, 360, 375, 390, 405, 420, 435, 450, 465, 480, 495, 510, 525, 540, 555, 570, 585, 600, 615, 630, 645, 660, 675, 690, 705, 720, 735, 750, 765, 780, 795, 810, 825, 840, 855, 870, 885, 900, 915, 930, 945, 960, 975, 990, 1005, 1020, 1035, 1050, 1065, 1080, 1095, 1110, 1125, 1140, 1155, 1170, 1185]